2018　テレ玉入試特別番組「埼玉県公立高校入試の傾向と対策」（練習問題）　＜数　学＞

円に関わる作図法

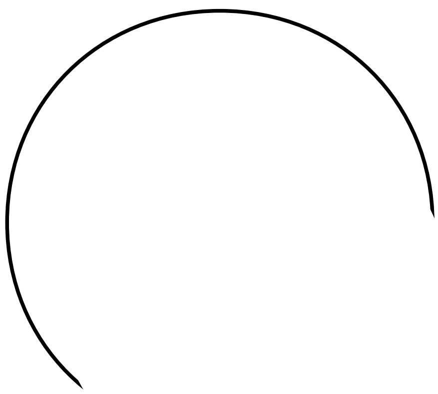
①弦の垂直二等分線は中心を通る！
②接線と半径は接点で垂直に交わる！
③2本の接線が作る角の二等分線は中心を通る！
④ある線分を直径とする円をかくと円周上に直角ができる！

線対称を利用した作図法

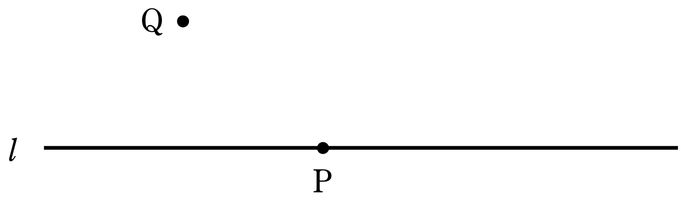
①2点から等距離・点と点が重なる場合の折り目は，その2点を結んだ線分の垂直二等分線を引く！
②2辺から等距離・辺と辺が重なる場合の折り目は，その2辺（2線分）の作る角の二等分線を引く！

＜作図問題＞

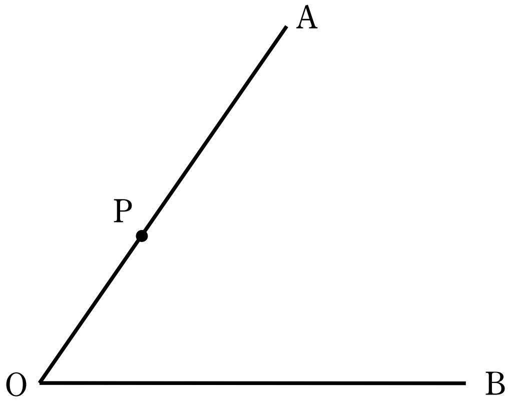
1 以下の図は，ある円の一部です。この円の中心をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



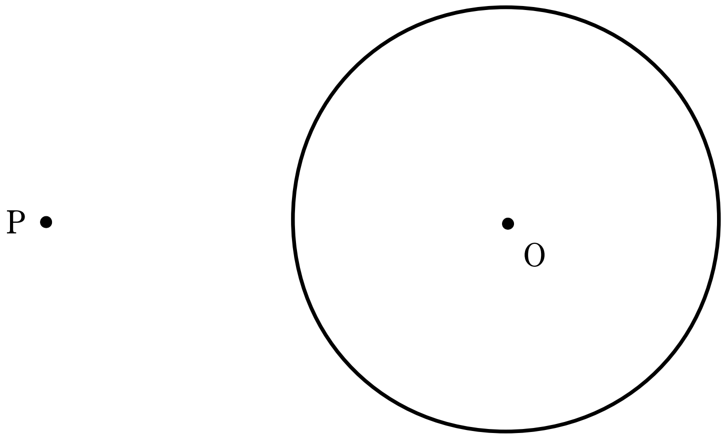
2 以下の図で，点 P で直線 l に接して点 Q を通る円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



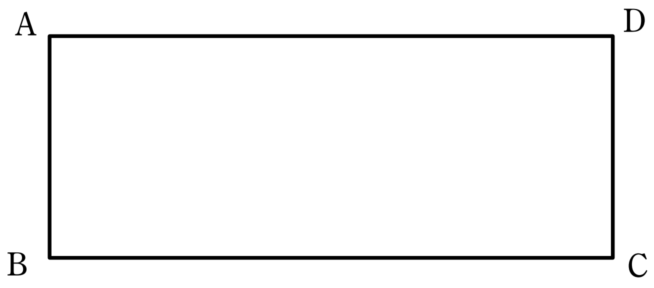
3 以下の図で，OA，OB に接する円のうち，点 P を接点とする円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



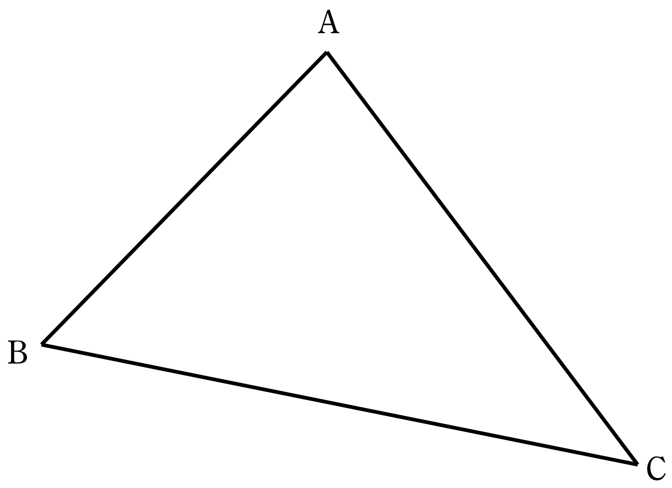
4 以下の図で，点 P から円 O への接線をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



5 以下の図で，四角形 ABCD は長方形である。この辺 AD 上に，∠BPC＝90°となるような点 P を１つ，コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



6 以下の図の△ABC において，２点 B，C から等距離にあり、さらに２つの辺 AB，BC までの距離の等しい点 D をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



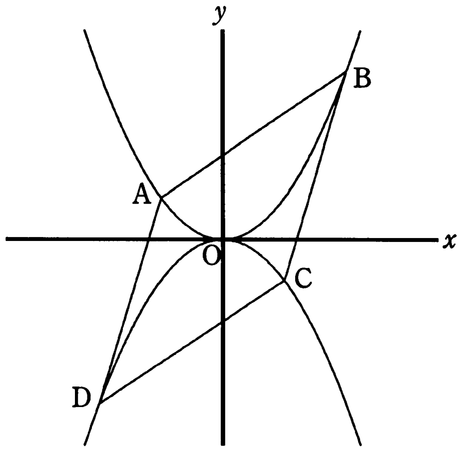
関数問題の攻略法

関数は図形で解け！

～図形の性質を駆使して解こう！～

＜関数問題＞

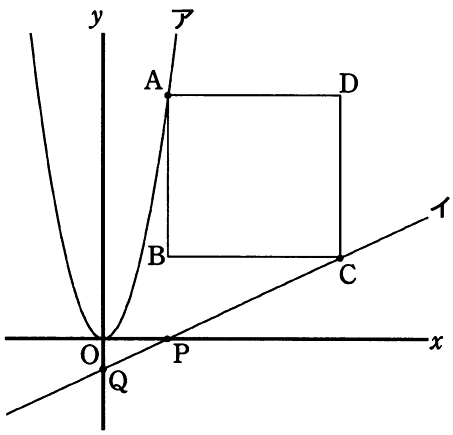
1 右の図で，A，B は放物線 $y = ax^2$ のグラフ上の点，C，D は放物線 $y = -ax^2$ のグラフ上の点で，四角形 ABCD は平行四辺形である。点 A，B，C の x 座標がそれぞれ-2，4，2 で，直線 AB の傾きが 1 であるとき，次の各問いに答えなさい。



(1) a の値を求めなさい。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。

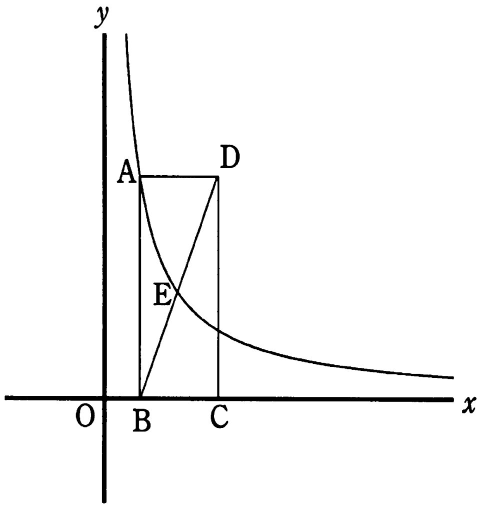
2 右の図において，曲線アは関数 $y=2x^2$ のグラフで，直線イは関数 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ のグラフである。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1) 直線イと x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とするとき，2 点 P，Q 間の距離を求めなさい。

(2) 正方形 ABCD において，辺 AD，AB はそれぞれ x 軸，y 軸に平行で，頂点 A は曲線ア上に，頂点 C は直線イ上にある。点 A の x 座標が 2 であるとき，点 C の x 座標を求めなさい。

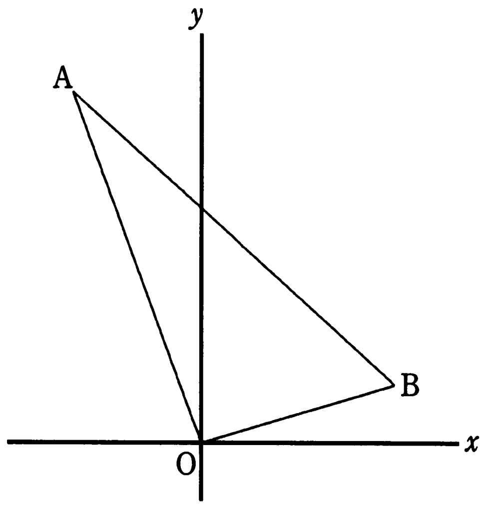
3 図のように，長方形 ABCD の頂点 A と対角線 BD の中点 E がともに関数 $y = \dfrac{3}{x}$ のグラフ上にあり，しかも辺 BC は x 軸上にあるものとする。点 E の x 座標が a であるとき，次の各問いに答えなさい。



(1) 点 B の x 座標を，a を用いて表しなさい。

(2) 長方形 ABCD が正方形になるとき，a の値を求めなさい。

4 右の図のように，$\angle AOB = 90°$，AO＝2BO の直角三角形 AOB がある。点 A の座標が $(-2, 6)$ であるとき，座標の 1 目盛を 1cm として，次の各問いに答えなさい。

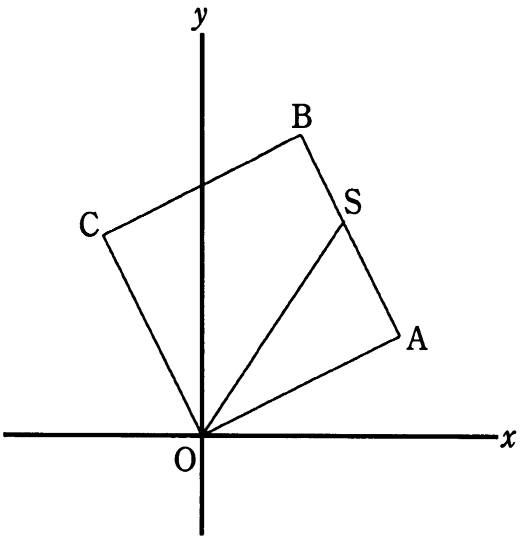


(1) 点 B の座標を求めなさい。

(2) △AOB の面積を求めなさい。

(3) 原点 O を通り，△OAB の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

5 右の図のように，正方形 OABC の辺 AB 上に点 S を，線分 OS が正方形の面積を 2:1 に分けるようにとる。O を原点，A(2, 1) とするとき，次の各問いに答えなさい。

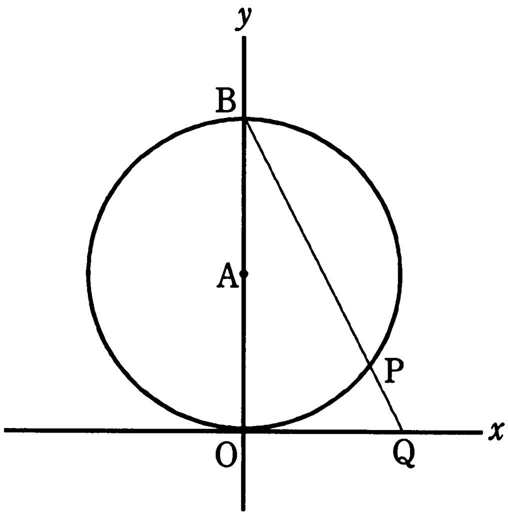


(1) 直線 AB の式を求めなさい。

(2) 線分 OS の長さを求めなさい。

(3) 直線 OS の方程式を求めなさい。

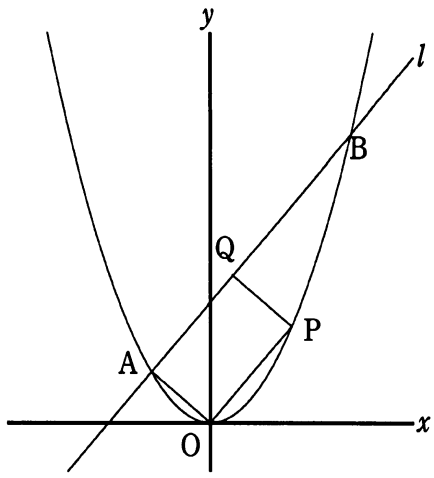
6 右の図のように，y 軸上に中心をもつ直径 12 の円 A は，原点で x 軸に接している。点 B(0, 12) と円周上を動く点 P を結ぶ線分の延長線が x 軸と交わる点を Q とする。このとき，次の各問いに答えなさい。



(1) OQ＝9 のとき，△OPB の面積は△OPQ の面積の何倍か求めなさい。

(2) ∠OBP の大きさが 30°から 60°まで変わるときの円周上を動く点 P の長さと，x 軸上を動く点 Q の長さをそれぞれ求めなさい。ただし，円周率は π とする。

7 右の図のように，放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$と直線lが，2 点 A，B で交わっており，その交点のx座標はそれぞれ-1，5 である。いま，原点を O とし，四角形 AOPQ が長方形になるように放物線上に点 P を，直線l上に点 Q をとる。このとき，次の各問いに答えなさい。

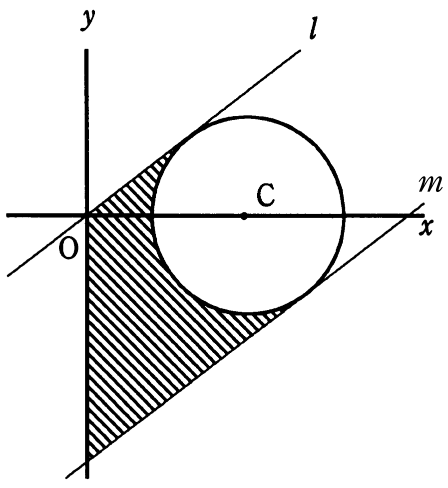


(1) 直線lの式を求めなさい。

(2) 点 Q の座標を求めなさい。

(3) 線分 AP を直径とする半円を AP の上側にかくとき，この半円とy軸との交点の座標を求めなさい。

8 右の図のように，点 C(10，0) を中心とする半径 6 の円に，平行な 2 直線l，mが接している。直線lが原点を通るとき，次の各問いに答えなさい。

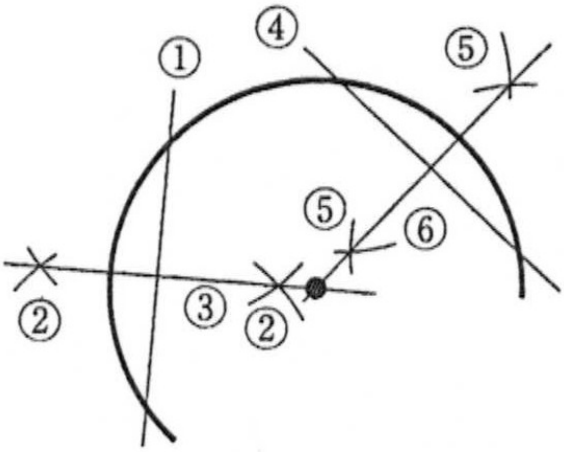


(1) 直線lの式を求めなさい。

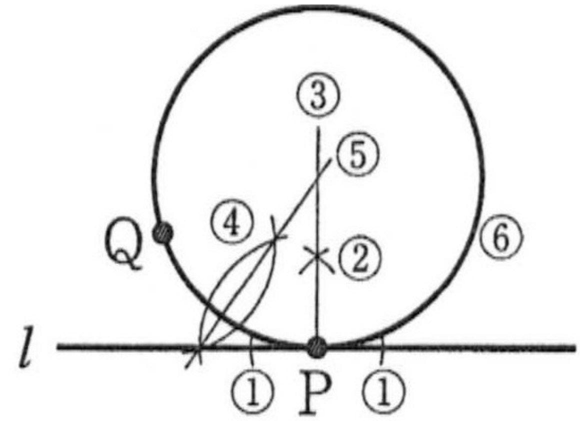
(2) 2 直線l，mとy軸および円で囲まれた図の斜線部分の面積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。

＜作図問題＞ 解答

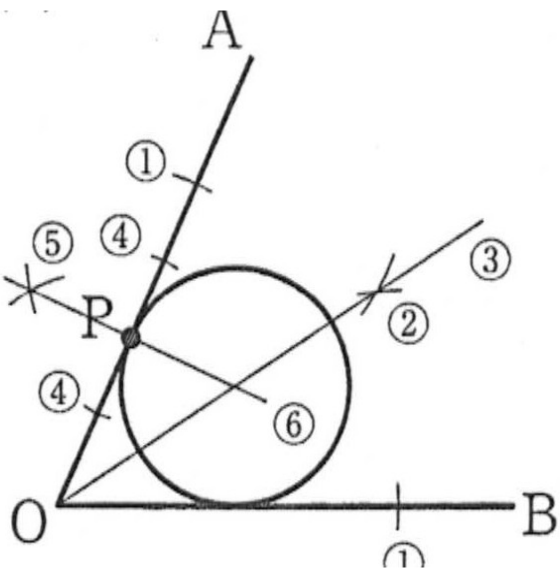
1



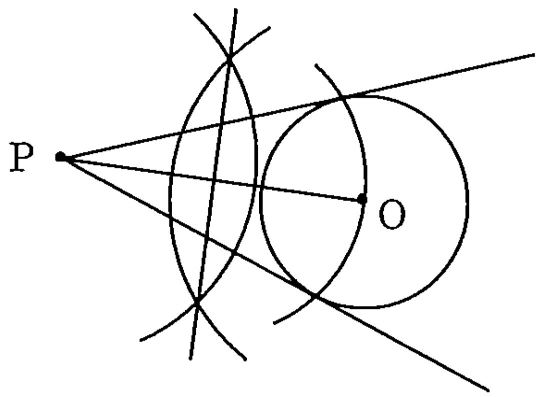
2



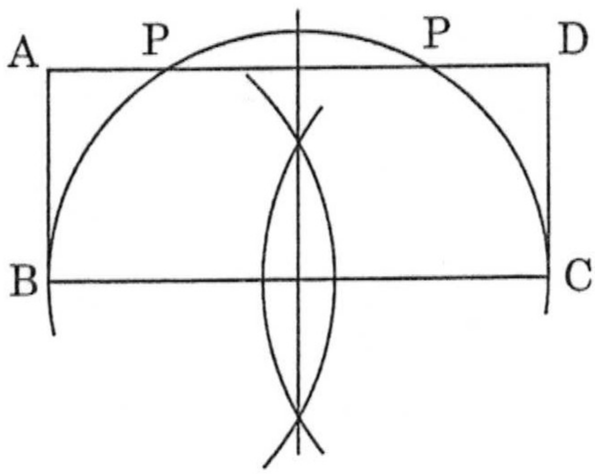
3



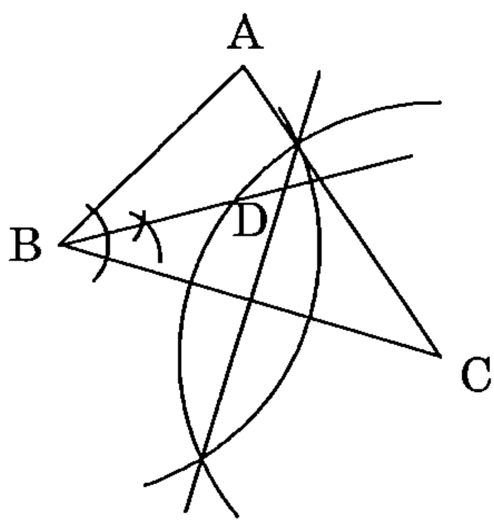
4



5



6



＜関数問題＞ 解答・解説

1 （解答） (1) $a=\frac{1}{2}$　　(2) 48

（解説）

(1) A$(-2,\ 4a)$, B$(4,\ 16a)$だから，変化の割合について $\frac{16a-4a}{4-(-2)}$ が成り立つので，$a=\frac{1}{2}$

(2) 2 点 A, B を通る直線の式を求めると，A$(-2,2)$, B$(4,8)$だから，$y=x+4$

また，C$(2,-2)$であることから，線分 AC の中点が原点になるので，平行四辺形の対角線の交点が原点と分かる。よって，面積については，（平行四辺形 ABCD）＝ 4 ×△OAB が成り立つので

（平行四辺形 ABCD）＝ $4\times$△OAB＝ $4\times\frac{1}{2}\times4\times(2+4)=48$

2 （解答）(1) $\sqrt{5}$　　(2) $x=\frac{22}{3}$

（解説）

(1) 直線イが，$y=\frac{2}{3}x-1$ だから，点 P, Q の座標はそれぞれ P$(2,0)$, Q$(0,-1)$となる。

よって，△ POQ で三平方の定理を利用して PQ ＝$\sqrt{5}$

(2) 対角線 AC において，四角形 ABCD が正方形であることから AD ＝ CD となるので，直線 AC の傾きは，変化の割合を利用すると，$\frac{-\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=-1$ となる。

よって，直線 AC は，点 A$(2,8)$を通り，傾きが-1 の直線だから，$y=-x+10$

したがって，点 C はこの直線 AC と直線イとの交点だから，2 式を連立して，$x=\frac{22}{3}$

3 （解答）(1) $\frac{1}{2}a$　　(2) $\sqrt{6}$

（解説）

(1) 題意より，点 E の座標は$(a,\ \frac{3}{a})$と表せる。これが，長方形の対角線の交点なので，対角線がそれぞれ中点で交わることから，点 A の y 座標は $\frac{3}{a}\times2=\frac{6}{a}$

よって，関数の式 $y=\frac{3}{x}$ に $y=\frac{6}{a}$ を代入して，x について解くと，$\frac{3}{x}=\frac{6}{a}$

両辺に ax をかけて→ $6x=3a$ 両辺を 6 でわって→ $x=\frac{1}{2}a$

(2) (1)より，各頂点の座標は，B$(\frac{1}{2}a,\ 0)$, A$(\frac{1}{2}a,\ \frac{6}{a})$, E$(a,\ \frac{3}{a})$より，点 C$(\frac{3}{2}a,\ 0)$となるので，AB$=\frac{6}{a}$, BC$=a$ より，四角形 ABCD が正方形だから $\frac{6}{a}=a$ が成り立つ。

両辺に a をかけて $6=a^2$　この 2 次方程式を解くと，$a>0$ より $a=\sqrt{6}$ となる。

4 （解答） (1) B$(3,1)$　　(2) 10 cm^2　　(3) $y=7x$

（解説）

(1) 点 A, B から x 軸にそれぞれ垂線 AH, BI を引くと，△AHO ∽△OIB※を得る。

AO＝2BO であることから，相似比は 2 : 1 となる。点 A$(-2,6)$から，AH ＝ 6, HO ＝ 2 だから，

△AHO∽△OIB で，相似比 2:1 を利用して，AH : OI ＝ 2 : 1 より 6 : OI＝2 : 1 が成り立つので，

これを解いて OI＝3

同様に，HO : IB＝2 : 1 より 2 : IB＝2 : 1 が成り立つので，これを解いて IB ＝ 1

したがって，点 B の座標は$(3,1)$

※△AHO∽△OIB の証明

△ AHO と△ OIB において，

仮定より，∠AHO＝∠OIB＝90°　…①

また，∠AOB＝90° であることから，一直線は 180° なので

∠AOH＝180 °－∠AOB－∠BOI

　　　＝ 90 °－∠BOI　…②

また，△BOI について，内角の和は 180°だから，

∠ OBI＝180°－∠OIB－∠BOI

　　　＝ 90 °－∠BOI　…③

②③より，∠AOH ＝∠OBI　…④

①④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△AHO ∽△OIB

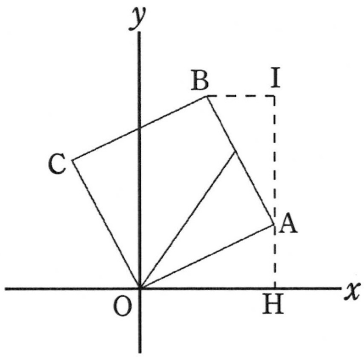
(2) △AOB＝台形 AHIB－△AHO－△BIO だから，求める面積は

$$\triangle AOB = (1+6)\times 5\times\frac{1}{2} - 2\times 6\times\frac{1}{2} - 3\times 1\times\frac{1}{2} = 10\ (\mathrm{cm}^2)$$

(3) 題意より，求める直線は原点 O 以外に，線分 AB の中点を通る。点 A(－ 2 , 6)，B(3 , 1)より，線分 AB の中点の座標は$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$となる。求める直線は原点を通る比例のグラフだから，$y=ax$ とおいて，$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{7}{2}$ を代入して，$a=7$　　　したがって，求める直線の式は $y=7x$

5 （解答）(1) $y=-2x+5$　　(2) $\frac{\sqrt{65}}{3}$　　(3) $y=\frac{7}{4}x$

（解説）



(1) 右の図のように，点 A を通り y 軸に平行な直線と，x 軸との交点を H，点 B を通り x 軸に平行な直線との交点を I とする。四角形 OABC が正方形だから OA ＝ AB であることより，△OAH≡△ABI※が成り立つ。よって，点 A の座標から OH ＝ 2，HA ＝ 1 だから，AI ＝ 2，IB ＝ 1 より，点 B の座標は(1, 3)

したがって，2 点 A(2, 1)，B(1, 3)を通る直線の式を求めて $y=-2x+5$

※ △OAH ≡△ABI の証明

△OAH と△ABI において

仮定より，OA＝AB　…①

　　∠OHA＝∠AIB＝ 90°　…②

また，∠OAB＝ 90° であることから，一直線は 180 °なので

∠OAH＝180°－∠OAB－∠BAI＝90°－∠BAI　…③

また，△ABI について，内角の和は 180°だから，

∠ ABI＝180°－∠AIB－∠BAI＝90°－∠BAI　…④

③④より，∠OAH ＝∠ABI　…⑤

①②⑤より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので，

△OAH ≡△ABI

(2) 題意より，△ AOS $=\frac{1}{3}\times$正方形 OABC $=\frac{1}{3}\times(2\triangle OAB)=\frac{2}{3}\times\triangle OAB$

よって，AS:SB＝2:1 だから，AS$=\frac{2}{3}$AB となる。 ここで，点 A(2 , 1)，B(1 , 3)より，三平方の定理を利用して，AB$=\sqrt{5}$ だから，AS$=\frac{2}{3}$AB $=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

したがって，AO$=\sqrt{5}$ より，△ AOS で三平方の定理を利用して OS $=\frac{\sqrt{65}}{3}$

(3) (2)より，点 S は線分 AB を（AS:SB＝）2 : 1 に分ける点である。点 A，B の x 座標の差は 1 であることから，$1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$より，点 S の x 座標は点 B の x 座標よりも$\frac{1}{3}$だけ大きい値になるから，点 S の x 座標は $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

よって(1)の式を利用して点 S の y 座標は $y=\frac{7}{3}$ を得るので，求める直線の式($y=ax$)に $x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{7}{3}$ を代入して $a=\frac{7}{4}$　　したがって，$y=\frac{7}{4}x$

6（解答） (1) $\frac{16}{9}$倍　　　(2) 動く点 P の長さ… 2π ，動く点 Q の長さ… $8\sqrt{3}$

（解説）

(1) OB が直径だから∠BPO＝90°となることより，△OPB∽△QPO※が成り立つ。

相似比は，OB:QO＝12:9＝4:3 だから，相似な図形の面積比は相似比の 2 乗であることを利用して，

△OPB:△QPO$=4^2:3^2$＝16:9

よって，△ OPB の面積は△ QPO の面積の$\frac{16}{9}$倍となる。

※△ OPB∽△QPO の証明

△OPB と△QPO において，

半円の弧に対する円周角は 90 °だから，∠OPB＝90°

よって，∠OPB＝∠QPO＝90°　…①

三角形の内角の和は 180°だから，△OPB において

∠PBO＝180°－（∠OPB＋∠POB）＝90°－∠POB　…②

また，∠BOQ＝90°だから，∠POQ＝90°－∠POB　…③

②，③より，∠PBO ＝∠POQ　…④

①，④より 2 組の角がそれぞれ等しいので，△OPB∽△QPO

(2) ∠OBP は弧 OP に対する円周角である。よって，∠OBP＝30°のときの弧 OP に対する中心角（∠OAP)の大きさは 60°，同様に∠OBP＝60°のときの弧 OP に対する中心角(∠OAP)の大きさは 120°である。したがって，点 P は，中心角が(120°－60°＝)60°のおうぎ形の弧の長さの分，動くことが分かるので，求める長さは，$2\pi\times6\times\frac{60}{360}=2\pi$

また点 Q について，∠OBP＝ 30°のとき，△BQO は辺の比が OQ:QB:BO ＝$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となることから，OQ の長さは，$1:\sqrt{3}$＝OQ:12 より　OQ ＝$4\sqrt{3}$

同様に，∠OBP＝60°のとき，△BQO は辺の比が OB:BQ:QO ＝ $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となることから，OQ の長さは，$1:\sqrt{3}$＝12:QO より　QO＝$12\sqrt{3}$

したがって，点 Q の動く長さは，$12\sqrt{3}-4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

7（解答）(1) $y=2x+\frac{5}{2}$　　(2) $(3,\ \frac{17}{2})$　　(3) $(0,\ \frac{17}{2})$

（解説）

(1) 放物線の式を利用して，点 $A(-1,\ \frac{1}{2})$，$B(5,\ \frac{25}{2})$ よって，2 点 A，B を通る直線の式を求めて $y=2x+\frac{5}{2}$

(2) (1)より直線 AQ の傾きは 2 と分かり，OP//AQ であることから直線 OP の傾きも 2 である。したがって，直線 OP の式は $y=2x$ と分かるから，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と連立して P(4, 8)
よって，OP＝AQ より，2 点 O，P の x 座標の差と，A，Q の x 座標の差は等しいので，点 Q の x 座標は $-1+4=3$
ゆえに，(1)で求めた直線の式に $x=3$ を代入して $y=\frac{17}{2}$ だから，求める座標は $(3,\ \frac{17}{2})$

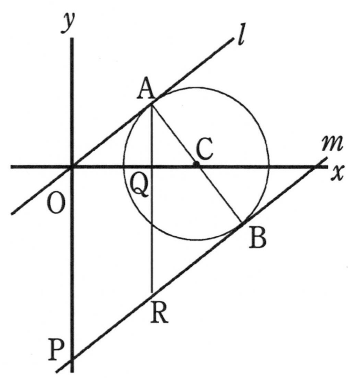
(3) ∠AQP＝∠AOP＝90°であることから，AP を直径とする円は，点 O を通る。
円の中心を R とする。$A(-1,\ \frac{1}{2})$，P(4 , 8)より，中心 R の座標は AP の中点だから $R(\frac{3}{2},\ \frac{17}{4})$
ここで，半円と y 軸との交点を S，点 R から y 軸へ垂線 RT を引くと，△RST≡△ROT※となる。
よって，ST＝OT より，点 S の y 座標は点 R の y 座標の 2 倍だから，$y=\frac{17}{2}$
したがって，求める座標は，$(0,\ \frac{17}{2})$

※ △RST ≡△ROT の証明
△RST と△ ROT において，
仮定より，∠RTS＝∠RTO＝90°　…①
円の半径より，RS＝RO　…②
共通より，RT＝RT　…③
①②③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので
△RST≡△ROT

8（解答）(1) $y=\frac{3}{4}x$　　(2) $150-18\pi$

（解説）

(1) 右の図のように，円 C と直線 l，m との接点を A，B とし，点 A から y 軸に平行な直線を引き，直線 m との交点を R とする。
△AOC で，AC＝6，OC＝10 だから，三平方の定理より，OA＝8
また，△OAQ∽△OCA※だから，辺の比を利用すると，
OQ : QA＝OA : AC＝8 : 6＝4 : 3
したがって，直線 l の傾きが変化の割合から
$\frac{QA}{OQ}=\frac{3}{4}$ を得るので，求める直線の式は $y=\frac{3}{4}x$



※ △OAQ∽△OCA の証明
△OAQ と△ OCA において，
仮定より，∠OQA＝∠OAC＝90°　…①
共通より，∠AOQ＝∠COA　…②
①②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
△OAQ∽△OCA

(2) (1)より，$\triangle OAQ$ は辺の比が $3:4:5$ の直角三角形である。
$\triangle OAQ \backsim \triangle ARB$※より，$\triangle ARB$ も辺の比が $3:4:5$ の直角三角形になるから，$AB=12$ より，
$AR=15$，$RB=9$ を得る。
また，四角形 AOPR について，$OA/\!/PR$，$OP/\!/AR$ より，2 組の対辺がそれぞれ平行だから，
四角形 AOPR は平行四辺形と分かるので，$PR=OA=8$
求める面積は，台形 AOPB から，半円を除いた図形だから，
$$(\text{斜線部})=(8+17)\times 12\times \frac{1}{2}-\pi\times 6^2\times\frac{1}{2}=150-18\pi$$

※ $\triangle OAQ \backsim \triangle ARB$ の証明
$\triangle OAQ$ と $\triangle ARB$ において，
仮定より，$\angle OQA=\angle ABR=90^\circ$ …①
また，$OA/\!/PB$ より，平行線の錯角は等しいので，$\angle OAQ=\angle ARB$ …②
①②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
$\triangle OAQ \backsim \triangle ARB$