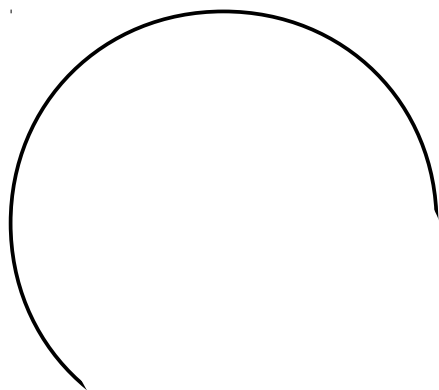


円に関わる作図法

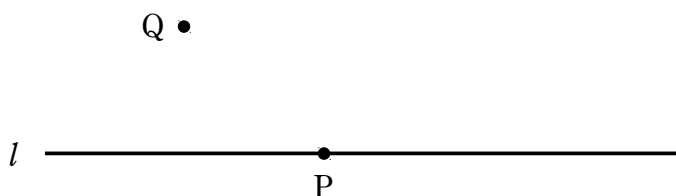
- ①弦の垂直二等分線は中心を通る！
- ②接線と半径は接点で垂直に交わる！
- ③2本の接線が作る角の二等分線は中心を通る！
- ④ある線分を直径とする円をかくと円周上に直角ができる！

<作図問題>

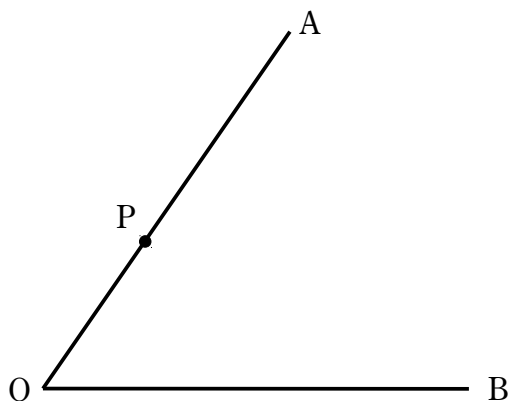
- 1** 以下の図は、ある円の一部です。この円の中心をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



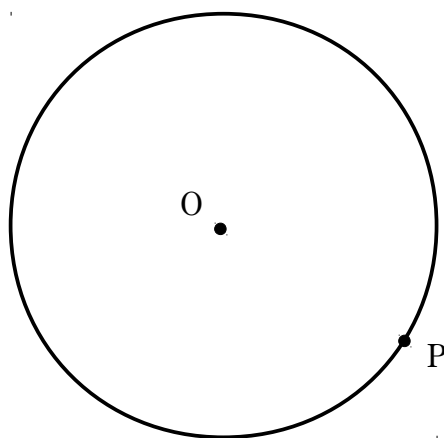
- 2** 以下の図で、点 P で直線 l に接して点 Q を通る円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



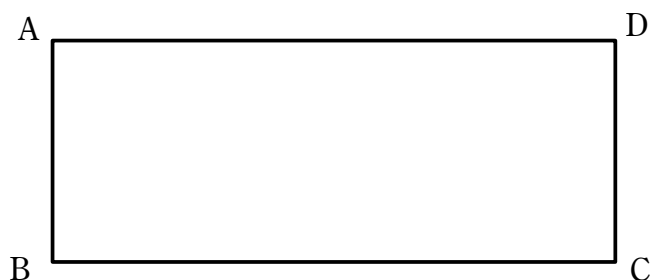
- 3 以下の図で、OA、OBに接する円のうち、点Pを接点とする円をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



- 4 以下の図で、点Oは円の中心、点Pは円周上の点である。このとき、点Pにおけるこの円の接線をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。



- 5 以下の図で、四角形ABCDは長方形である。この辺AD上に、 $\angle BPC = 90^\circ$ となるような点Pを1つ、コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図するためにかいた線は消さないでおきなさい。

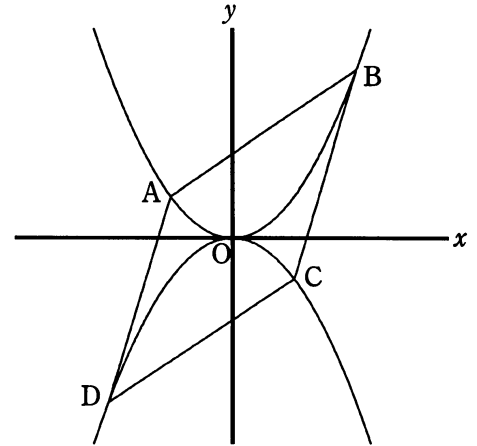


関数は図形で解け！

～図形の性質を駆使して解こう！～

<関数問題>

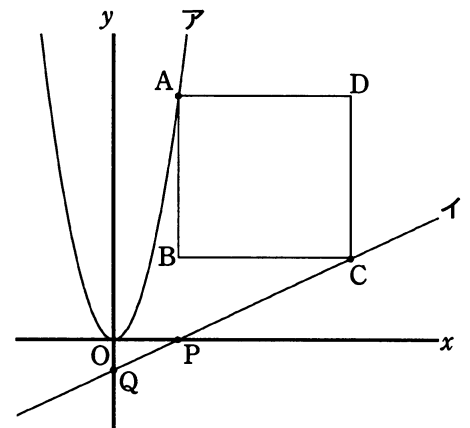
- 1 右の図で、A, Bは放物線 $y = ax^2$ のグラフ上の点、C, Dは放物線 $y = -ax^2$ のグラフ上の点で、四角形 ABCD は平行四辺形である。点 A, B, C の x 座標がそれぞれ $-2, 4, 2$ で、直線 AB の傾きが 1 であるとき、次の各問いに答えなさい。
- (1) a の値を求めなさい。



- (2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。

- 2 右の図において、曲線アは関数 $y = 2x^2$ のグラフで、直線イは関数 $y = \frac{1}{2}x - 1$ のグラフである。このとき、次の各問いに答えなさい。

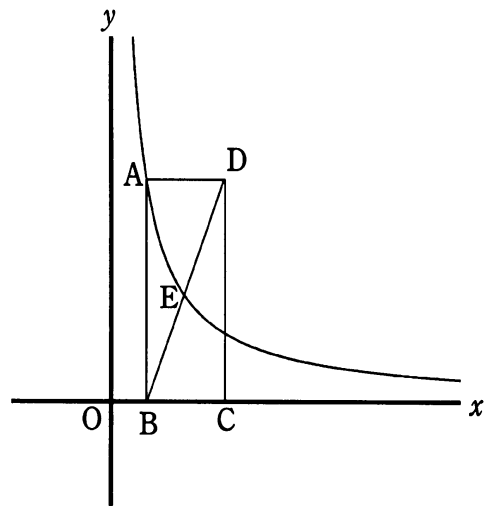
- (1) 直線イと x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ P, Q とするとき、2 点 P, Q 間の距離を求めなさい。



- (2) 正方形 ABCD において、辺 AD, AB はそれぞれ x 軸、 y 軸に平行で、頂点 A は曲線ア上に、頂点 C は直線イ上にある。点 A の x 座標が 2 であるとき、点 C の x 座標を求めなさい。

3 図のように、長方形 ABCD の頂点 A と対角線 BD の中点 E がともに関数 $y = \frac{3}{x}$ のグラフ上にあり、しかも辺 BC は x 軸上にあるものとする。点 E の x 座標が a であるとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 点 B の x 座標を、 a を用いて表しなさい。

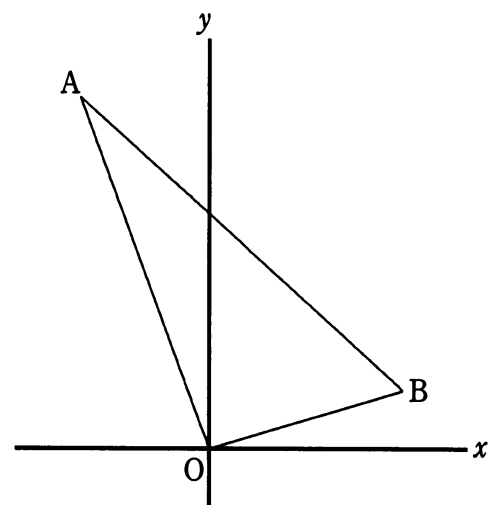


(2) 長方形 ABCD が正方形になるとき、 a の値を求めなさい。

4 右の図のように、 $\angle AOB = 90^\circ$ 、 $AO = 2BO$ の直角三角形 AOB がある。点 A の座標が $(-2, 6)$ であるとき、座標の 1 目盛を 1cm として、次の各問いに答えなさい。

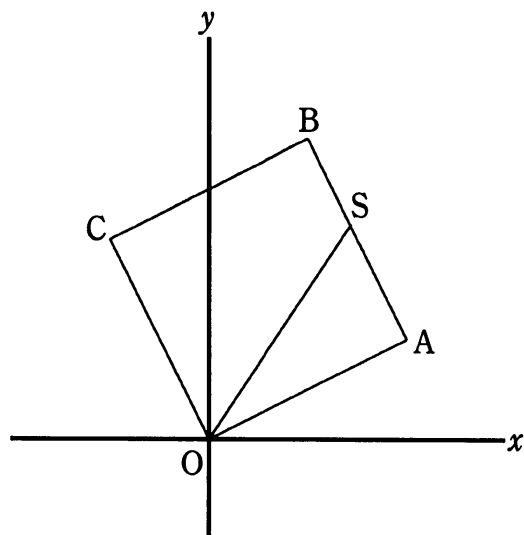
(1) 点 B の座標を求めなさい。

(2) $\triangle AOB$ の面積を求めなさい。



(3) 原点 O を通り、 $\triangle OAB$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

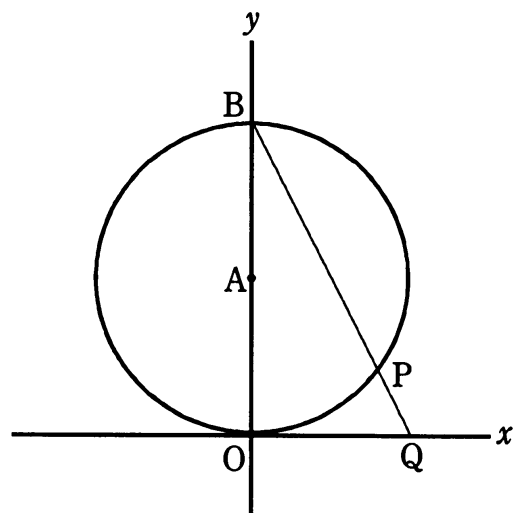
- 5 右の図のように、正方形 OABC の辺 AB 上に点 S を、線分 OS が正方形の面積を 2:1 に分けるようにとる。O を原点、A(2, 1) とするとき、次の各問いに答えなさい。
- (1) 直線 AB の式を求めなさい。



- (2) 線分 OS の長さを求めなさい。

- (3) 直線 OS の方程式を求めなさい。

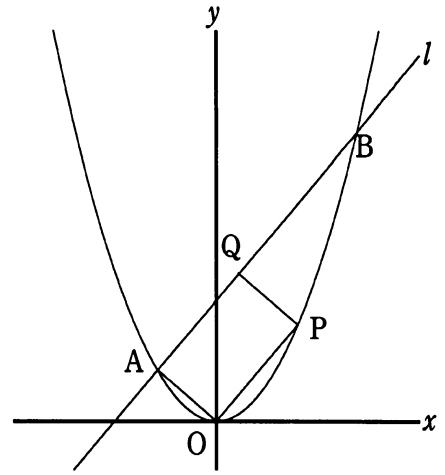
- 6 右の図のように、 y 軸上に中心をもつ直径 12 の円 A は、原点で x 軸に接している。点 B(0, 12) と円周上を動く点 P を結ぶ線分の延長線が x 軸と交わる点を Q とする。



- このとき、次の各問いに答えなさい。
- (1) $OQ=9$ のとき、 $\triangle OPB$ の面積は $\triangle OPQ$ の面積の何倍か求めなさい。

- (2) $\angle OBP$ の大きさが 30° から 60° まで変わるときの円周上を動く点 P の長さ、 x 軸上を動く点 Q の長さをそれぞれ求めなさい。ただし、円周率は π とする。

7 右の図のように、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 l が、2 点 A, B で交わり、その交点の x 座標はそれぞれ $-1, 5$ である。いま、原点を O とし、四角形 $AOPQ$ が長方形になるように放物線上に点 P を、直線 l 上に点 Q をとる。このとき、次の各問いに答えなさい。

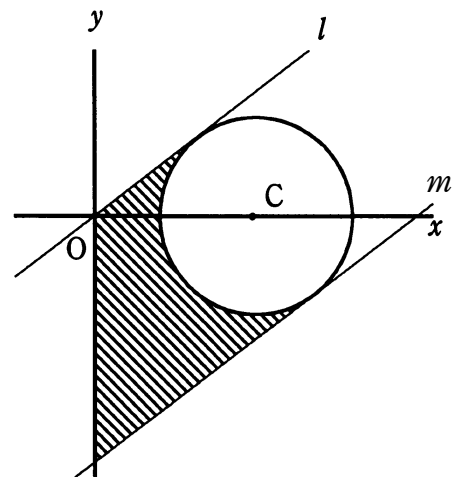


(1) 直線 l の式を求めなさい。

(2) 点 Q の座標を求めなさい。

(3) 線分 AP を直径とする半円を AP の上側にかくとき、この半円と y 軸との交点の座標を求めなさい。

8 右の図のように、点 $C(0, 10)$ を中心とする半径 6 の円に、平行な 2 直線 l, m が接している。直線 l が原点を通るとき、次の各問いに答えなさい。

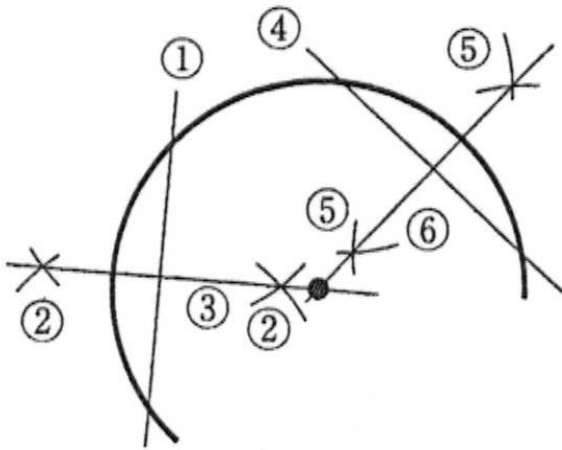


(1) 直線 l の式を求めなさい。

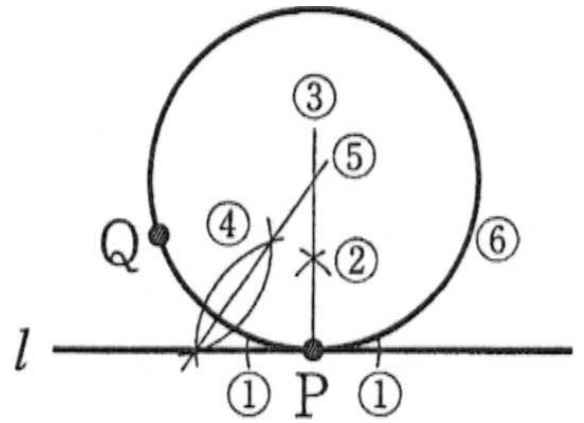
(2) 2 直線 l, m と y 軸および円で囲まれた図の斜線部分の面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

<作図問題> 解答

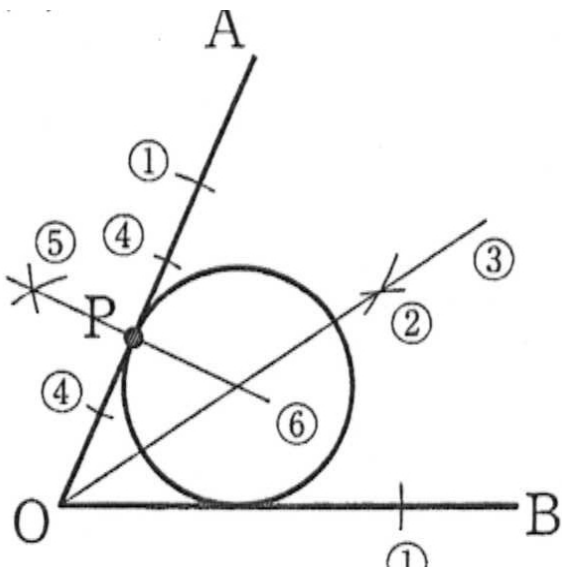
1



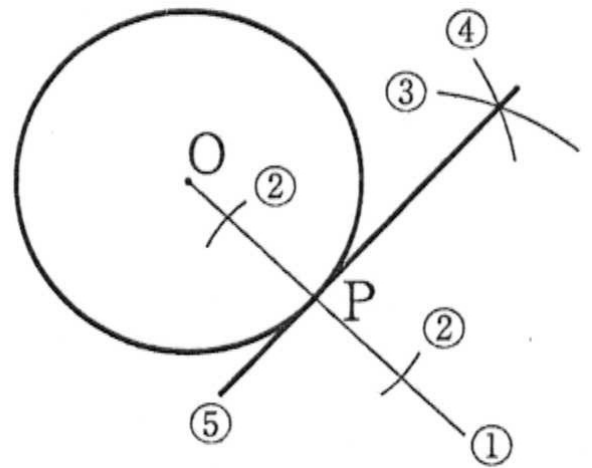
2



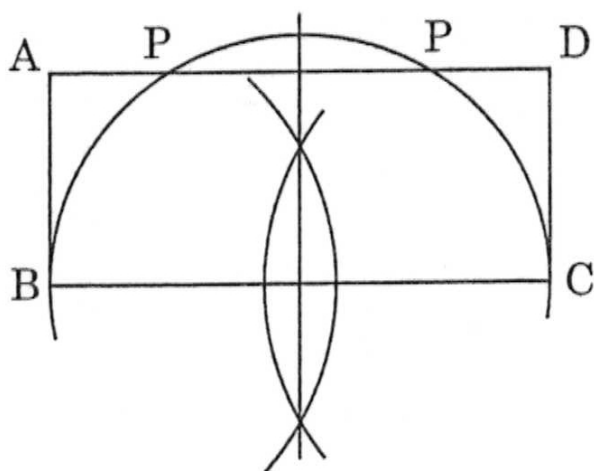
3



4



5



<関数問題> 解答・解説

1 (解答) (1) $a = \frac{1}{2}$ (2) 48

(解説)

(1) $A(-2, 4a)$, $B(4, 16a)$ だから、変化の割合について $\frac{16a - 4a}{4 - (-2)}$ が成り立つので、 $a = \frac{1}{2}$

(2) 2点 A, B を通る直線の式を求めると、 $A(-2, 2)$, $B(4, 8)$ だから、 $y = x + 4$

また、 $C(2, -2)$ であることから、線分 AC の中点が原点になるので、平行四辺形の対角線の交点が原点と分かる。よって、面積については、(平行四辺形 $ABCD$) = $4 \times \triangle OAB$ が成り立つので

$$(\text{平行四辺形 } ABCD) = 4 \times \triangle OAB = 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times (2+4) = 48$$

2 (解答)(1) $\sqrt{5}$ (2) $x = \frac{22}{3}$

(解説)

(1) 直線 l が、 $y = \frac{2}{3}x - 1$ だから、点 P, Q の座標はそれぞれ $P(2, 0)$, $Q(0, -1)$ となる。

よって、 $\triangle POQ$ で三平方の定理を利用して $PQ = \sqrt{5}$

(2) 対角線 AC において、四角形 $ABCD$ が正方形であることから $AD = CD$ となるので、直線 AC の傾きは、変化の割合を利用すると、 $\frac{-CD}{AB} = -1$ となる。

よって、直線 AC は、点 $A(2, 8)$ を通り、傾きが -1 の直線だから、 $y = -x + 10$

したがって、点 C はこの直線 AC と直線 l との交点だから、2式を連立して、 $x = \frac{22}{3}$

したがって、点 C はこの直線 AC と直線 l との交点だから、2式を連立して、 $x = \frac{22}{3}$

3 (解答)(1) $\frac{1}{2}a$ (2) $\sqrt{6}$

(解説)

(1) 題意より、点 E の座標は $(a, \frac{3}{a})$ と表せる。これが、長方形の対角線の交点なので、対角線がそれぞれ

中点で交わることから、点 A の y 座標は $\frac{3}{a} \times 2 = \frac{6}{a}$

よって、関数の式 $y = \frac{3}{x}$ に $y = \frac{6}{a}$ を代入して、 x について解くと、 $\frac{3}{x} = \frac{6}{a}$

両辺に ax をかけて $\rightarrow 6x = 3a$ 両辺を 6 でわって $\rightarrow x = \frac{1}{2}a$

(2) (1)より、各頂点の座標は、 $B(\frac{1}{2}a, 0)$, $A(\frac{1}{2}a, \frac{6}{a})$, $E(a, \frac{3}{a})$ より、点 $C(\frac{3}{2}a, 0)$ となるので、

$AB = \frac{6}{a}$, $BC = a$ より、四角形 $ABCD$ が正方形だから $\frac{6}{a} = a$ が成り立つ。

両辺に a をかけて $6 = a^2$ この2次方程式を解くと、 $a > 0$ より $a = \sqrt{6}$ となる。

4 (解答) (1) $B(3, 1)$ (2) 10 cm^2 (3) $y = 7x$

(解説)

(1) 点 A, B から x 軸にそれぞれ垂線 AH, BI を引くと、 $\triangle AHO \sim \triangle OIB$ ※を得る。

$AO = 2BO$ であることから、相似比は $2:1$ となる。点 $A(-2, 6)$ から、 $AH = 6$, $HO = 2$ だから、

$\triangle AHO \sim \triangle OIB$ で、相似比 $2:1$ を利用して、 $AH:OI = 2:1$ より $6:OI = 2:1$ が成り立つので、

これを解いて $OI = 3$

同様に、 $HO:IB = 2:1$ より $2:IB = 2:1$ が成り立つので、これを解いて $IB = 1$

したがって、点 B の座標は $(3, 1)$

※ $\triangle AHO \sim \triangle OIB$ の証明

$\triangle AHO$ と $\triangle OIB$ において、

仮定より、 $\angle AHO = \angle OIB = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

また、 $\angle AOB = 90^\circ$ であることから、一直線は 180° なので

$$\angle AOH = 180^\circ - \angle AOB - \angle BOI$$

$$= 90^\circ - \angle BOI \dots \textcircled{2}$$

また、 $\triangle BOI$ について、内角の和は 180° だから、

$$\angle OBI = 180^\circ - \angle OIB - \angle BOI$$

$$= 90^\circ - \angle BOI \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}\textcircled{3}$ より、 $\angle AOH = \angle OBI \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}\textcircled{4}$ より、2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle AHO \sim \triangle OIB$

(2) $\triangle AOB = \text{台形 AHIB} - \triangle AHO - \triangle BIO$ だから、求める面積は

$$\triangle AOB = (1 + 6) \times 5 \times \frac{1}{2} - 2 \times 6 \times \frac{1}{2} - 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(3) 題意より、求める直線は原点 O 以外に、線分 AB の中点を通る。点 $A(-2, 6)$, $B(3, 1)$ より、線分 AB

の中点の座標は $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ となる。求める直線は原点を通る比例のグラフだから、 $y = ax$ とおいて、

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{7}{2} \text{ を代入して、} a = 7 \quad \text{したがって、求める直線の式は } y = 7x$$

- 5** (解答) (1) $y = -2x + 5$ (2) $\frac{\sqrt{65}}{3}$ (3) $y = \frac{7}{4}x$

(解説)

(1) 右の図のように、点 A を通り y 軸に平行な直線と、 x 軸

との交点を H 、点 B を通り x 軸に平行な直線との交点を I

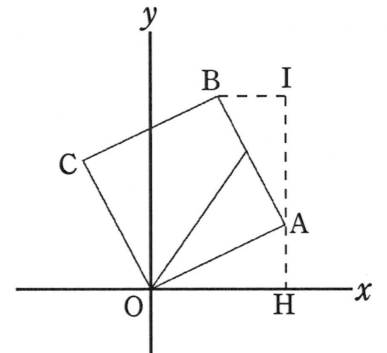
とする。四角形 $OABC$ が正方形だから $OA = AB$ であること

より、 $\triangle OAH \cong \triangle ABI$ ※ が成り立つ。よって、点 A の座標から

$OH = 2$, $HA = 1$ だから、 $AI = 2$, $IB = 1$ より、点 B の座標

は $(1, 3)$

したがって、2点 $A(2, 1)$, $B(1, 3)$ を通る直線の式を求めて $y = -2x + 5$



※ $\triangle OAH \cong \triangle ABI$ の証明

$\triangle OAH$ と $\triangle ABI$ において

仮定より、 $OA = AB \dots \textcircled{1}$

$$\angle OHA = \angle AIB = 90^\circ \dots \textcircled{2}$$

また、 $\angle OAB = 90^\circ$ であることから、一直線は 180° なので

$$\angle OAH = 180^\circ - \angle OAB - \angle BAI = 90^\circ - \angle BAI \dots \textcircled{3}$$

また、 $\triangle AIB$ について、内角の和は 180° だから、

$$\angle ABI = 180^\circ - \angle AIB - \angle BAI = 90^\circ - \angle BAI \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $\angle OAH = \angle ABI \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{5}$ より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、

$\triangle OAH \cong \triangle ABI$

$$(2) \text{ 題意より, } \triangle AOS = \frac{1}{3} \times \text{正方形 } OABC = \frac{1}{3} \times (2 \triangle OAB) = \frac{2}{3} \times \triangle OAB$$

よって, $AS:SB=2:1$ だから, $AS=\frac{2}{3}AB$ となる。ここで, 点 $A(2, 1)$, $B(1, 3)$ より, 三平方の定理を利用

$$\text{用して, } AB=\sqrt{5} \text{ だから, } AS=\frac{2}{3}AB = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{したがって, } AO=\sqrt{5} \text{ より, } \triangle AOS \text{ で三平方の定理を利用して } OS = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

(3) (2)より, 点 S は線分 AB を $(AS:SB=)2:1$ に分ける点である。点 A, B の x 座標の差は 1 であることから, $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ より, 点 S の x 座標は点 B の x 座標よりも $\frac{1}{3}$ だけ大きい値になるから, 点 S の x 座

$$\text{標は } 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

よって(1)の式を利用して点 S の y 座標は $y = \frac{7}{3}$ を得るので, 求める直線の式($y=ax$)に

$$x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3} \text{ を代入して } a = \frac{7}{4} \quad \text{したがって, } y = \frac{7}{4}x$$

6 (解答) (1) $\frac{22}{3}$ 倍

(2) 動く点 P の長さ… 2π , 動く点 Q の長さ… $8\sqrt{3}$

(解説)

(1) OB が直径だから $\angle BPO=90^\circ$ となることより, $\triangle OPB \sim \triangle QPO$ ※が成り立つ。

相似比は, $OB:QO=12:9=4:3$ だから, 相似な図形の面積比は相似比の 2 乗であることを利用して,

$$\triangle OPB : \triangle QPO = 4^2 : 3^2 = 16 : 9$$

よって, $\triangle OPB$ の面積は $\triangle QPO$ の面積の $\frac{16}{9}$ 倍となる。

※ $\triangle OPB \sim \triangle QPO$ の証明

$\triangle OPB$ と $\triangle QPO$ において,

半円の弧に対する円周角は 90° だから, $\angle OPB = 90^\circ$

よって, $\angle OPB = \angle QPO = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

三角形の内角の和は 180° だから, $\triangle OPB$ において

$$\angle PBO = 180^\circ - (\angle OPB + \angle POB) = 90^\circ - \angle POB \dots \textcircled{2}$$

また, $\angle BOQ = 90^\circ$ だから, $\angle POQ = 90^\circ - \angle POB \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より, $\angle PBO = \angle POQ \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より 2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle OPB \sim \triangle QPO$

(2) $\angle OBP$ は弧 OP に対する円周角である。よって, $\angle OBP=30^\circ$ のときの弧 OP に対する中心角

($\angle OAP$)の大きさは 60° , 同様に $\angle OBP=60^\circ$ のときの弧 OP に対する中心角($\angle OAP$)の大きさは 120° である。したがって, 点 P は, 中心角が $(120^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$ のおうぎ形の弧の長さの分, 動くことが分かる

$$\text{ので, 求める長さは, } 2\pi \times 6 \times \frac{60}{360} = 2\pi$$

また, 点 Q について, $\angle OBP=30^\circ$ のとき, $\triangle BOP$ は辺の比が $OQ:QB:BO = 1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となることから, OQ の長さは, $1:\sqrt{3} = OQ:12$ より $OQ = 4\sqrt{3}$

同様に, $\angle OBP=60^\circ$ のとき, $\triangle BOP$ は辺の比が $OB:BQ:QO = 1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となることから, OQ の長さは, $1:\sqrt{3} = 12:QO$ より $QO = 12\sqrt{3}$

したがって, 点 Q の動く長さは, $12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

7 (解答) (1) $y=2x + \frac{5}{2}$ (2) $(3, \frac{17}{2})$ (3) $(0, \frac{17}{2})$

(解説)

(1) 放物線の式を利用して, 点 A $(-1, \frac{1}{2})$, B $(5, \frac{25}{2})$ によって, 2 点 A, B を通る直線の式を求め
て $y=2x + \frac{5}{2}$

(2) (1)より直線 AQ の傾きは 2 と分かり, OP//AQ であることから直線 OP の傾きも 2 である。したがって,
直線 OP の式は $y=2x$ と分かるから, 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と連立して P(4, 8)
よって, OP=AQ より, 2 点 O, P の x 座標の差と, A, Q の x 座標の差は等しいので, 点 Q の x 座標は
 $-1+4=3$
ゆえに, (1)で求めた直線の式に $x=3$ を代入して $y=\frac{17}{2}$ だから, 求める座標は $(3, \frac{17}{2})$

(3) $\angle AQP = \angle AOP = 90^\circ$ であることから, AP を直径とする円は, 点 O を通る。
円の中心を R とする。A $(-1, \frac{1}{2})$, P(4, 8) より, 中心 R の座標は AP の中点だから $R(\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$
ここで, 半円と y 軸との交点を S, 点 R から y 軸へ垂線 RT を引くと, $\triangle RST \equiv \triangle ROT$ となる。
よって, $ST=OT$ より, 点 S の y 座標は点 R の y 座標の 2 倍だから, $y=\frac{17}{2}$
したがって, 求める座標は, $(0, \frac{17}{2})$

※ $\triangle RST \equiv \triangle ROT$ の証明

$\triangle RST$ と $\triangle ROT$ において,

仮定より, $\angle RTS = \angle RTO = 90^\circ$ …①

円の半径より, $RS = RO$ …②

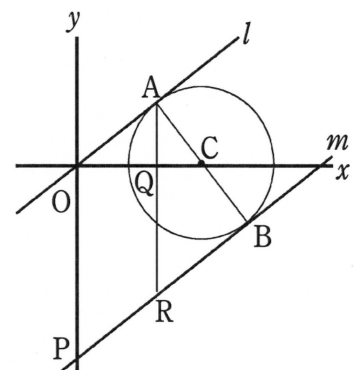
共通より, $RT = RT$ …③

①②③より, 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので
 $\triangle RST \equiv \triangle ROT$

8 (解答) (1) $y = \frac{3}{4}x$ (2) $150 - 18\pi$

(解説)

(1) 右の図のように, 円 C と直線 l, m との接点を A, B とし,
点 A から y 軸に平行な直線を引き, 直線 m との交点を R と
する。
 $\triangle AOC$ で, $AC=6$, $OC=10$ だから, 三平方の定理より, $OA=8$
また, $\triangle OAQ \sim \triangle OCA$ ※だから, 辺の比を利用すると,
 $OQ:QA=OA:AC=8:6=4:3$
したがって, 直線 l の傾きが変化の割合から
 $\frac{QA}{OQ} = \frac{3}{4}$ を得るので, 求める直線の式は $y = \frac{3}{4}x$



※ $\triangle OAQ \sim \triangle OCA$ の証明

$\triangle OAQ$ と $\triangle OCA$ において,

仮定より, $\angle OQA = \angle OAC = 90^\circ$ …①

共通より, $\angle AOQ = \angle COA$ …②

①②より, 2 組の角がそれぞれ等しいので,
 $\triangle OAQ \sim \triangle OCA$

(2) (1)より, $\triangle OAQ$ は辺の比が 3:4:5 の直角三角形である。

$\triangle OAQ \sim \triangle ARB$ ※より, $\triangle ARB$ も辺の比が 3:4:5 の直角三角形になるから, $AB=12$ より, $AR=15$, $RB=9$ を得る。

また, 四角形 AOPR について, $OA \parallel PR$, $OP \parallel AR$ より, 2 組の対辺がそれぞれ平行だから, 四角形 AOPR は平行四辺形と分かるので, $PR=OA=8$

求める面積は, 台形 AOPB から, 半円を除いた図形だから,

$$(\text{斜線部}) = (8+17) \times 12 \times \frac{1}{2} - \pi \times 6^2 \times \frac{1}{2} = 150 - 18\pi$$

※ $\triangle OAQ \sim \triangle ARB$ の証明

$\triangle OAQ$ と $\triangle ARB$ において,

仮定より, $\angle OQA = \angle ABR = 90^\circ$ …①

また, $OA \parallel PB$ より, 平行線の錯角は等しいので, $\angle OAQ = \angle ARB$ …②

①②より, 2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle OAQ \sim \triangle ARB$